3°/

a) $\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\vec{i}\right)+\left(\vec{i}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}\right)(2\pi)$

$\equiv -\arg(z_B-z_A)+\arg(z_C-z_A)(2\pi)\equiv\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)(2\pi)$

$\equiv\arg\left(\dfrac{-e^{i\beta}-e^{i\alpha}}{e^{i\beta}-e^{i\alpha}}\right)(2\pi)\equiv\arg\left(\dfrac{e^{i\alpha}-e^{i\beta}}{e^{i\alpha}-e^{i\beta}}\right)(2\pi)$

$\equiv\arg(\dfrac{1}{Z})(2\pi)\equiv-\arg(Z)(2\pi)$

or d'après 1°/ Z est un nombre imaginaire alors $\arg(Z)\equiv\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}(2\pi)\\ ou\\ -\dfrac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases}$

et par suite ABC est un triangle rectangle en A .

b) Pour que ABC soit un triangle isocèle il suffit que AB = AC

on a : AB = AC

$\Leftrightarrow|z_B-z_A|=|z_C-z_A|=|e^{i\beta}-e^{i\alpha}|=|-e^{i\beta}-e^{i\alpha}|$

$\Leftrightarrow|(\cos\beta-\cos\alpha)+i(\sin\beta-\sin\alpha)|=|(\cos\beta+\cos\alpha)+i(\sin\beta+\sin\alpha)|$

$(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2=(\cos\beta+\cos\alpha)^2+(\sin\beta+\sin\alpha)^2$

$\Leftrightarrow\cos^2\beta+\cos^2\alpha-2\cos\beta\cos\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\beta\sin\alpha$

$=\cos^2\beta+\cos^2\alpha+2\cos\beta\cos\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\alpha+2\sin\beta\sin\alpha$

$\Leftrightarrow 2-2\cos\beta\cos\alpha-2\sin\beta\sin\alpha=2+2\cos\beta\cos\alpha+2\sin\beta\sin\alpha$

$\Leftrightarrow\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=0\Leftrightarrow\cos(\beta-\alpha)=0$

$\Leftrightarrow\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\quad où\quad k\in Z$

$or-\pi<\beta-\alpha<\pi\ \ d'où-\pi<\dfrac{\pi}{2}+k\pi<\pi\Rightarrow\dfrac{-3\pi}{2}<k\pi<\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow k=-1\ ou\ k=0\ d'où\ \beta-\alpha=-\dfrac{\pi}{2}ou\ \beta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

Conclusion : $\beta=\alpha-\dfrac{\pi}{2}ou\ \beta=\alpha+\dfrac{\pi}{2}$